

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN ÔN THI ĐẠI HỌC

Chuyên đề: **CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN**

Tác giả: Lê Trung Tín

Trường: THPT Hồng Ngự 2, đồng tháp

Sử dụng bất đẳng thức cổ điển:

Bài 1. Cho $x \in [0; 3], y \in [0; 4]$ là số thực thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (3 - x)(4 - y)(2x + 3y)$$

Giải:

Vì $x \in [0; 3], y \in [0; 4]$ nên

$$P = \frac{1}{6} \cdot 2(3 - x) \cdot 3(4 - y) \cdot (2x + 3y) \leq \frac{1}{6} \left(\frac{2(3 - x) + 3(4 - y) + (2x + 3y)}{3} \right)^3 = 36$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $2(3 - x) = 3(4 - y) = (2x + 3y) \Leftrightarrow x = 0, y = 2$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 36, đạt được khi và chỉ khi $x = 0, y = 2$.

Bài 2. Cho x, y, z là số thực dương thay đổi và thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a}$$

Giải:

Theo bất đẳng thức cô-si, ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a+b} &= \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{(a+b) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{(a+b) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3}} \\ \sqrt[3]{b+c} &= \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{(b+c) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{(b+c) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3}} \\ \sqrt[3]{c+a} &= \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{(c+a) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{(c+a) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3}}\end{aligned}$$

Suy ra

$$P \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{2(a+b+c) + 4}{3}} = \sqrt[3]{18}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt[3]{18}$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Bài 3. Cho x, y, z là số thực không âm thay đổi và thỏa mãn $xy + yz + zx = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 6x^2 + 6y^2 + 2z^2$$

Giải:

Ta có:

$$4x^2 + z^2 \geq 4xz$$

$$4y^2 + z^2 \geq 4yz$$

$$2x^2 + 2y^2 \geq 4xy$$

Do đó: $P \geq 4(xy + yz + zx) = 20$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1, z = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 20, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1, z = 2$

Bài 4. Cho a, b, c là ba số thực dương thay đổi và thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2}$$

Giải:

Theo bất đẳng thức cô-si, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+b^2} &= a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab}{2} \\ \frac{b}{1+c^2} &= b - \frac{bc^2}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2} \\ \frac{c}{1+a^2} &= c - \frac{ca^2}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}\end{aligned}$$

Suy ra

$$P \geq (a+b+c) - \frac{ab+bc+ca}{2} = 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow -(ab+bc+ca) &\geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3\end{aligned}$$

Do đó: $P \geq \frac{3}{2}$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$, đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 5. Cho a, b, c là ba số thực dương thay đổi và thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2}$$

Giải:

Theo bất đẳng thức cô-si, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+2b^2} &= a - \frac{2ab^2}{a+2b^2} \geq a - \frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}} = a - \frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2b^2} \\ \frac{b^2}{b+2c^2} &= b - \frac{2bc^2}{b+2c^2} \geq b - \frac{2bc^2}{3\sqrt[3]{bc^4}} = b - \frac{2}{3}\sqrt[3]{b^2c^2} \\ \frac{c^2}{c+2a^2} &= c - \frac{2ca^2}{c+2a^2} \geq c - \frac{2ca^2}{3\sqrt[3]{ca^4}} = c - \frac{2}{3}\sqrt[3]{c^2a^2}\end{aligned}$$

Suy ra

$$P \geq (a+b+c) - \frac{2}{3} \left(\sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{c^2a^2} \right)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức cô-si, ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^2b^2} &= \sqrt[3]{1.ab.ab} \leq \frac{1+2ab}{3} \\ \sqrt[3]{b^2c^2} &= \sqrt[3]{1.bc.bc} \leq \frac{1+2bc}{3} \\ \sqrt[3]{c^2a^2} &= \sqrt[3]{1.ca.ca} \leq \frac{1+2ca}{3}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{c^2a^2} \leq 1 + \frac{2(ab+bc+ca)}{3} \leq 1 + \frac{2(a+b+c)^2}{9} = 1 + 2 = 3$$

Do đó $P \geq 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 1$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1, đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 6. Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $a + b + c \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$$

Giải:

Ta có:

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \sqrt{\left(a^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2\right)(4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4a + \frac{1}{b}\right)$$

$$\sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \sqrt{\left(b^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2\right)(4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4b + \frac{1}{c}\right)$$

$$\sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \sqrt{\left(c^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right)(4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4c + \frac{1}{a}\right)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4a + 4b + 4c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\frac{15(a+b+c)}{4} + \frac{(a+b+c)}{4} + \frac{9}{a+b+c}\right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\frac{15 \cdot 6}{4} + 2 \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{17}}{2}$, đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Bài 7. Cho x, y, z là các số thực thay đổi và thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + 2y^2 + z^2$$

Giải:

Ta có

$$(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \left(\left(\frac{18}{11}\right)^2 + 2 \left(\frac{9}{11}\right)^2 + 3 \left(\frac{6}{11}\right)^2 \right) \geq \frac{18}{11} (x + y + z)^2 = \frac{18}{11} \cdot 9$$

Suy ra: $S \geq 3$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{18}{11}, y = \frac{9}{11}, z = \frac{6}{11}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3, đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{18}{11}, y = \frac{9}{11}, z = \frac{6}{11}$

Bài 8. Cho x, y là các số thực thay đổi và thỏa mãn $36x^2 + 16y^2 = 9$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = y - 2x + 5$$

Giải:

Ta có

$$\frac{25}{16} = ((6x)^2 + (4y)^2) \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right) \geq (-2x + y)^2$$

$$\text{Suy ra } -\frac{5}{4} \leq y - 2x \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{15}{4} \leq y - 2x + 5 \leq \frac{25}{4}$$

Ta có:

- $P = \frac{15}{4}$ khi và chỉ khi $x = \frac{2}{5}, y = -\frac{9}{20}$
- $P = \frac{25}{4}$ khi và chỉ khi $x = -\frac{2}{5}, y = \frac{9}{20}$

Vậy:

- Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{2}{5}, y = -\frac{9}{20}$
- Giá trị lớn nhất P là $\frac{25}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $x = -\frac{2}{5}, y = \frac{9}{20}$

Bài 9. Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{xy+2} + \frac{1}{xy+2} + \frac{1}{yz+2} + \frac{1}{zx+2}$$

Giải:

Theo bất đẳng thức bunhiacốpski, ta có

$$xy + yz + zx \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{y^2 + z^2 + x^2} = 3$$

Theo hệ quả bất đẳng thức bunhiacốpski, ta có:

$$P \geq \frac{9}{xy + yz + zx + 6} \geq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1, đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Sử dụng phương pháp miền giá trị (Điều kiện có nghiệm):

Bài 1. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 3$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

$$P = x^2 + xy - 2y^2$$

Giải:

Gọi T là tập giá trị của P . Khi đó, $m \in T$ khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x^2 + xy - 2y^2 = m \end{cases} \quad (I)$$

- Nếu $y = 0$ thì (I) trở thành $\begin{cases} x^2 = 3 \\ m = 3 \end{cases}$
- Nếu $y \neq 0$ thì đặt $x = ty$, ta có hệ

$$\begin{cases} y^2(t^2 - t + 1) = 3 \\ y^2(t^2 + t - 2) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{3}{t^2 - t + 1} \\ m = \frac{3(t^2 + t - 2)}{t^2 - t + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm \sqrt{\frac{3}{t^2 - t + 1}} \\ (m - 3)t^2 - (m + 3)t + m + 6 = 0 \end{cases} \quad (II)$$

Trong trường hợp này, hệ (I) có nghiệm khi và chỉ khi hệ (II) có nghiệm $y \neq 0$, điều này tương đương phương trình $(m - 3)t^2 - (m + 3)t + m + 6 = 0$ có nghiệm.

+ Nếu $m = 3$ thì (2) có nghiệm $t = \frac{3}{2}$.

+ Nếu $m \neq 3$ thì (2) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = -3m^2 - 6m + 81 \geq 0 \Leftrightarrow -1 - 2\sqrt{7} \leq m \leq -1 + 2\sqrt{7}$
Ta có:

$$\bullet m = -1 - 2\sqrt{7} \text{ khi và chỉ khi } t = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -(\sqrt{7} - 3)\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}}} \\ y = \sqrt{2 + \frac{4}{\sqrt{7}}} \end{cases}, \begin{cases} x = (\sqrt{7} - 3)\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}}} \\ y = -\sqrt{2 + \frac{4}{\sqrt{7}}} \end{cases}$$

$$\bullet m = -1 + 2\sqrt{7} \text{ khi và chỉ khi } t = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (\sqrt{7} + 3)\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{7}}} \\ y = \sqrt{2 - \frac{4}{\sqrt{7}}} \end{cases}, \begin{cases} x = -(\sqrt{7} + 3)\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{7}}} \\ y = -\sqrt{2 - \frac{4}{\sqrt{7}}} \end{cases}$$

Vậy: min $P = -1 - 2\sqrt{7}$, đạt tại $\left(-(\sqrt{7} - 3)\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}}}, \sqrt{2 + \frac{4}{\sqrt{7}}}\right)$ hoặc $\left((\sqrt{7} - 3)\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}}}, -\sqrt{2 + \frac{4}{\sqrt{7}}}\right)$
max $P = -1 + 2\sqrt{7}$, đạt tại $\left((\sqrt{7} + 3)\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{7}}}, \sqrt{2 - \frac{4}{\sqrt{7}}}\right)$, hoặc $\left(-(\sqrt{7} + 3)\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{7}}}, -\sqrt{2 - \frac{4}{\sqrt{7}}}\right)$

Bài 2. Cho các số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thỏa mãn $(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm GTLN của biểu thức

$$S = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$$

Giải:

Gọi T là tập giá trị của P . Khi đó $m \in T$ khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm $x \neq 0, y \neq 0$

$$\begin{cases} (x + y)xy = x^2 + y^2 - xy \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)xy = (x + y)^2 - 3xy \\ \left(\frac{x + y}{xy}\right)^2 = m \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$

Ta có, hệ:

$$\begin{cases} SP = S^2 = 3P \\ \left(\frac{S}{P}\right)^2 = m \end{cases} \quad (II)$$

Hệ (I) có nghiệm $x \neq 0, y \neq 0$ khi và chỉ khi hệ (II) có nghiệm (S, P) thỏa mãn $S^2 \geq 4P$

Vì $SP = x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$ với mọi $x \neq 0, y \neq 0$. Do đó $\frac{S}{P} > 0$ với mọi $x \neq 0, y \neq 0$.

Từ đó:

• Nếu $m \leq 0$ thì hệ (II) vô nghiệm.

• Nếu $m > 0$ thì từ phương trình thứ hai của hệ (II), ta có $\frac{S}{P} = \sqrt{m} \Leftrightarrow S = \sqrt{m}P$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ (II), ta có $\sqrt{m}P^2 = mP^2 - 3P \Leftrightarrow (m - \sqrt{m})P = 3$ (Vì $SP > 0$ nên $P \neq 0$).

Để có P thì $\sqrt{m} - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ (do $m > 0$) và ta được $P = \frac{3}{\sqrt{m}(\sqrt{m} - 1)} \Rightarrow S = \frac{3}{\sqrt{m} - 1}$.

Trong trường hợp này, hệ (II) có nghiệm (S, P) thỏa mãn $S^2 \geq 4P$ khi và chỉ khi

$$\left(\frac{3}{\sqrt{m} - 1}\right)^2 \geq 4 \frac{3}{\sqrt{m}(\sqrt{m} - 1)} \Leftrightarrow \sqrt{m} \leq 4 \Leftrightarrow 0 < m \leq 16 (m \neq 1)$$

Do đó, Hệ (I) có nghiệm $x \neq 0, y \neq 0$ khi và chỉ khi $0 < m \leq 16 (m \neq 1)$

Ta có $m = 16$ khi và chỉ khi $P = \frac{1}{4}, S = 1$ hay $x = y = \frac{1}{2}$

Vậy max $P = 16$, đạt tại $x = y = \frac{1}{2}$

Sử dụng phương pháp tiếp tuyến:

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực không âm thay đổi và thỏa mãn $a + b + c = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^3 + b^3 + c^3) - 6$$

Giải:

Ta có

$$P = (a^4 - 2a^3 - 2) + (b^4 - 2b^3 - 2) + (c^4 - 2c^3 - 2)$$

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2$, với $x \in [0; 6]$

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

Phương trình tiếp tuyến của $f(x)$ tại $x = 2$ là

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2) \Leftrightarrow y = 8x - 18$$

Bây giờ ta chứng minh $f(x) \geq 8x - 18$ (1). Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(x) - (8x - 18) &= x^4 - 2x^3 - 8x + 16 \\ &= (x - 2)^2(x^2 - 2x + 4) \geq 0 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$. Theo (1), ta được

$$P \geq (8a - 18) + (8b - 18) + (8c - 18) = 8(a + b + c) - 54 = 8.6 - 54 = -6$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -6 , đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Bài 2. Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab}$$

Giải:

Vì $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$ nên ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+bc} &\geq \frac{a}{1 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} = \frac{4a}{4 + (1-a)^2} \\ \frac{b}{1+ca} &\geq \frac{b}{1 + \left(\frac{c+a}{2}\right)^2} = \frac{4b}{4 + (1-b)^2} \\ \frac{c}{1+ab} &\geq \frac{c}{1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \frac{4c}{4 + (1-c)^2} \end{aligned}$$

Suy ra:

$$P \geq \frac{4a}{4 + (1-a)^2} + \frac{4b}{4 + (1-b)^2} + \frac{4c}{4 + (1-c)^2}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{4x}{4 + (1-x)^2} = \frac{4x}{x^2 - 2x + 5}$, với $x \in (0; 1)$

Ta có

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 20}{(x^2 - 2x + 5)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến của $f(x)$ tại điểm $x = \frac{1}{3}$ là $y = \frac{99x - 3}{100}$

Bây giờ ta chứng minh $f(x) - \frac{99x - 3}{100} \geq 0$ (1). Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{99x - 3}{100} &= \frac{4x}{x^2 - 2x + 5} - \frac{99x - 3}{100} \\ &= \frac{(3x - 1)^2(15 - 11x)}{100(x^2 - 2x + 5)} \geq 0, \forall x \in (0; 1) \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{3}$

Theo (1), ta được

$$P \geq \frac{99a - 3}{100} + \frac{99b - 3}{100} + \frac{99c - 3}{100} = \frac{9}{10}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{10}$, đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Sử dụng phương pháp đưa về khảo sát hàm 1 biến:

Bài 1. Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1; 4]$ và $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x + 3y} + \frac{y}{y + z} + \frac{z}{z + x}$$

Giải:

Trước hết, ta chứng minh với a, b là các số thực dương và thỏa mãn $ab \geq 1$, ta luôn có

$$\frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b} \geq \frac{2}{1 + \sqrt{ab}} \quad (1)$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (a + b + 2)(1 + \sqrt{ab}) \geq 2(1 + a)(1 + b) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{ab} - 1)(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng với } a, b > 0 \text{ và } ab \geq 1) \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $ab = 1$.

Áp dụng (1), với $x, y \in [1; 2]$ và $x \geq y$, ta có

$$P \geq \frac{1}{2 + 3\frac{y}{x}} + \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{z}{y} = \frac{x}{z}$ hoặc $\frac{x}{y} = 1$ (2).

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$, điều kiện $t \in [1; 2]$. Khi đó:

$$P \geq f(t) = \frac{t^2}{2t^2 + 3} + \frac{2}{1 + t}, \text{ với } t \in [1; 2]$$

Ta có

$$f'(t) = \frac{-2(t^3(4t - 3) + 3t(2t - 1) + 9)}{(2t^2 + 3)^2(1 + t)^2} < 0, \forall t \in [1; 2]$$

Suy ra $f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ (Do $x \geq y, x, y \in [1; 4]$) (3)

Kết hợp (2), (3), ta được $z = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{34}{33}$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 4, y = 1, z = 2$.

Bài 2. Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4 \left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} \right) - 9 \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right)$$

Giải:

Với $a, b > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2) + ab &= (a + b)(ab + 2) \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) + ab = a^2b + b^2a + 2(a + b) \\ &\Leftrightarrow 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 1 = (a + b) + 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức cô-si, ta có

$$(a + b) + 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 2\sqrt{2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \right)}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(a + b) = 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ Suy ra:

$$2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 1 \geq 2\sqrt{2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \right)} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{5}{2}$$

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, điều kiện $t \geq \frac{5}{2}$

Khi đó:

$$P = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$$

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$, với $t \geq \frac{5}{2}$ Ta có:

$$f'(t) = 12t^2 - 18t - 12 = 6(2t^2 - 3t - 2) > 0, \forall t \geq \frac{5}{2}$$

Suy ra: $f(t) \geq f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5}{2} \\ (a + b) = 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, b = 1 \\ a = 1, b = 2 \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{23}{4}$ đạt được khi $a = 2, b = 1$ hoặc $a = 1, b = 2$.

Bài 3. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Giải:

Ta có

$$P \geq (ab + bc + ca)^2 + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{1 - 2(ab + bc + ca)}$$

Đặt $t = ab + bc + ca$, ta có $0 \leq t \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{1}{3}$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 3t + 2\sqrt{1 - 2t}$ trên $\left[0; \frac{1}{3}\right]$

Ta có:

$$f'(t) = 2t + 3 - \frac{2}{\sqrt{1-2t}}$$
$$f''(t) = 2 - \frac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$$

$$\text{Suy ra } f'(t) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3} - 2\sqrt{3} > 0, \forall t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$$

Do đó

$$P \geq f(t) \geq f(0) = 2, \forall t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} ab + bc + ca = 0 \\ ab = bc = ca \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, b = 0, c = 0 \\ a = 0, b = 1, c = 0 \\ a = 0, b = 0, c = 1 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2, đạt được khi $a = 1, b = 0, c = 0$ hoặc $a = 0, b = 1, c = 0$ hoặc $a = 0, b = 0, c = 1$.

Bài 4. Cho các số thực a, b thay đổi và thỏa mãn $(a+b)^3 + 4ab \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3(a^4 + b^4 + a^2b^2) - 2(a^2 + b^2) + 1$$

Giải:

Ta có

$$(a+b)^3 + 4ab \geq 2$$
$$\Rightarrow 2 \leq (a+b)^3 + (a+b)^2 \quad (\text{Do } 2\sqrt{ab} \leq a+b)$$
$$\Rightarrow (a+b-1)((a+b)^2 + 2(a+b) + 2) \geq 0$$
$$\Rightarrow a+b \geq 1$$

Mặt khác

$$P = 3(a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - a^2b^2) - 2(a^2 + b^2) + 1$$
$$= 3(a^2 + b^2)^2 - 3a^2b^2 - 2(a^2 + b^2) + 1$$
$$\geq 3(a^2 + b^2)^2 - \frac{3}{4}(a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2) + 1$$
$$= \frac{9}{4}(a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2) + 1$$

$$\text{Đặt } t = a^2 + b^2, \text{ ta có } t = a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1 \text{ với } t \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 > 0, \forall t \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } P \geq f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ là } \frac{9}{16}, \text{ đạt được khi } a=b=\frac{1}{2}.$$

Bài 5. Cho hai số thực a, b thay đổi và thỏa mãn $a^2 + b^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2(a^2 + 6ab)}{1 + 2ab + 2b^2}$$

Giải:

- Với $b = 0$, kết hợp điều kiện ta được $P = 2$.
- Với $b \neq 0$, kết hợp điều kiện ta được

$$P = \frac{2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 12\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right) + 3}$$

Đặt $t = \frac{a}{b}$, ta được

$$P = f(t) = \frac{2t^2 + 12t}{t^2 + 2t + 3}$$

Ta có

$$f'(t) = \frac{-8t^2 + 12t + 36}{(t^2 + 2t + 3)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -8t^2 + 12t + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{3}{2} \\ t = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$	2	-6	3	2

Theo bảng biến thiên ta được:

- $P = f(t) \geq -6$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{\sqrt{13}}, b = -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ a = -\frac{3}{\sqrt{13}}, b = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$
- $P = f(t) \leq 3$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{\sqrt{10}}, b = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ a = -\frac{3}{\sqrt{10}}, b = -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$

Vậy:

- Giá trị nhỏ nhất của P là -6 , đạt được khi và chỉ khi $a = \frac{3}{\sqrt{13}}, b = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, hoặc $a = -\frac{3}{\sqrt{13}}, b = \frac{2}{\sqrt{13}}$
- Giá trị lớn nhất của P là 3 , đạt được khi và chỉ khi $a = \frac{3}{\sqrt{10}}, b = \frac{1}{\sqrt{10}}$, hoặc $a = -\frac{3}{\sqrt{10}}, b = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

Bài 6. Cho $x, y, z \in (0; 1)$ và $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2$$

Giải:

Ta có

$$\begin{aligned}xyz &= (1-x)(1-y)(1-z) \Leftrightarrow 1 - (x+y+z) + xy + yz + zx - 2xyz = 0 \\&\Leftrightarrow 2 - 2(x+y+z) + 2(xy + yz + zx) - 4xyz = 0 \\&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(x+y+z) + 2 - 4xyz\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức côsi tacó

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq xyz$$

Do đó: $x^2 + y^2 + z^2 \geq (x+y+z)^2 - 2(x+y+z) + 2 - 4\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$

Đặt $t = x+y+z$, điều kiện $0 < t < 3$.

Xét hàm số $g(t) = -\frac{4}{27}t^3 + t^2 - 2t + 2$ với $t \in (0; 3)$

Ta có: $g'(t) = -\frac{4}{9}t^2 + 2t - 2$ với $t \in (0; 3)$.

Suy ra $g'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{9}t^2 + 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{3}{2}$	3
$g'(t)$		-	+
$g(t)$	2	$\frac{3}{4}$	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta được:

$P \geq g(t) \geq g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$

Bài 7. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}$$

Giải:

Ta chứng minh rằng với mọi $t \geq 0$ ta luôn có: $3^t \geq t + 1$

Thật vậy, ta xét hàm số $f(t) = 3^t - t - 1$, ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 - 1 > 0$ với mọi $t \geq 0$.

Áp dụng nhận xét trên ta có :

$$3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} \geq 3 + |x-y| + |y-z| + |z-x|$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức $|a| + |b| \geq |a+b|$ ta có :

$$\begin{aligned}(|x-y| + |y-z| + |z-x|)^2 &= |x-y|^2 + |y-z|^2 + |z-x|^2 + 2|x-y|(|y-z| + |z-x|) + \\&\quad + 2|y-z|(|z-x| + |x-y|) + 2|z-x|(|x-y| + |y-z|) \\&\Rightarrow (|x-y| + |y-z| + |z-x|)^2 \geq 2(|x-y|^2 + |y-z|^2 + |z-x|^2)\end{aligned}$$

Do đó: $|x-y| + |y-z| + |z-x| \geq \sqrt{2(|x-y|^2 + |y-z|^2 + |z-x|^2)} = \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 2(x+y+z)^2}$

Mà $x+y+z=0$ nên suy ra : $|x-y| + |y-z| + |z-x| \geq \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}$.

Do đó: $P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2} \geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Vậy min $P = 3$, đạt tại $x = y = z$.