



---

## Examen Final

---

### Exercice – 1 (03 Points)

Calculer  $\sin 18^\circ$  à la quatrième décimale près en utilisant le développement de Taylor de la fonction  $\sin x$  au voisinage du zéro.

### Exercice – 2 (05 Points)

Soit la tabulation de la fonction  $f(x)$  :

$x$	5.7	6.0	6.4	6.8
$f(x)$	9.92066	10.75056	11.88031	13.03507

Calculer  $f(6.2)$  par interpolatin quadratique et estimer l'erreur.

### Exercice – 3 (06 Points)

Soit le paramètre réel  $m \neq 0$  et la matrice  $A$  donnée comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

Calculer  $A^{-1}$  par la méthode de Gauss.

### Exercice – 4 (06 Points)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' = x - \ln y \\ y(2) = 3.4 \end{cases}$$

Calculer  $y(2.8)$  par la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre avec  $h = 0.8$  puis avec  $h = 0.4$  et estimer l'erreur pour  $h = 0.4$ .



## Corrigé Examen final

### Exercice – 1 (3.0 Points)

On sait que :  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$  [01] qui est une série alternée convergente, l'erreur de troncature est inférieur au premier terme omis donc :

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5!} - \dots$$
 [01]

$\sin 18^\circ \simeq 0.314159 - 0.005168 + 0.000026 - \dots$  on voit que le troisième terme  $0.000026 \leq 0.5 \times 10^{-4}$  [0.5] indiquant qu'on peut conserver uniquement les deux premiers termes. Donc :  $\sin 18^\circ \simeq 0.3090$  [0.5]

### Exercice – 2 (5.0 Points)

On a la table des différences divisées [02] :

x	y			
5.7	9.92066	$a_0$		
6.0	10.75056		$a_1$	
6.4	11.88031			$a_2$
6.8	13.03507			
		2.76633	0.08293	
		2.82438	0.07815	
		2.8869		
				$-0.00435 \simeq \frac{f^{(3)}(x)}{3!}$

$$P_2(x) = \begin{cases} 9.92066 \\ +2.76633(x - 5.7) \\ +0.08293(x - 5.7)(x - 6) \end{cases}$$
 [01]

donnant :  $f(6.2) \simeq P_2(6.2) = 11.312118$  [0.5]

mais la fonction  $f(x)$  étant inconnue on peut estimer l'erreur comme suit :

$$|R_2(x)| \simeq 0.00435 |(x - 5.7)(x - 6)(x - 6.4)|$$
 [0.5]

ce qui donne :  $R_2(6.2) \simeq 0.8 \times 10^{-4} \leq 0.5 \times 10^{-3}$  [0.5]

donc :  $f(6.2) \simeq P_2(6.2) \simeq 11.312$  [0.5]

### Exercice – 3 (06 Points)

On applique la méthode de Gauss au système augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} m & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 = L_1 \\ L_2 = L_2 \\ L_3 = L_3 + (-\frac{1}{m})L_1 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{ccc|ccc} m & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{m-1}{m} & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & 0 & 1 \end{array} \right]$$
 [02]

$$\begin{array}{l} L_1 = L_1 \\ L_2 = L_2 \\ L_3 = L_3 + (\frac{1-m}{m})L_2 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{ccc|ccc} m & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1-m}{m} & 1 \end{array} \right]$$
 [01]

par remontée triangulaire on obtient [03] :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1-m & m \end{bmatrix}$$

### Exercice – 4 (06 Points)

Calcul de  $y(2.8)$  avec  $h = 0.8$  [1.5] :

i	x	y	$0.8(x - \ln y)$	$\Delta y$
0	2.0	3.400000	0.620980	
	2.2	3.710490	0.871069	
	2.4	3.835534	0.844553	
	2.8	4.244553	1.083491	0.855952
1	2.8	4.255952		

Calcul de  $y(2.8)$  avec  $h = 0.4$  [03] :

i	x	y	$0.4(x - \ln y)$	$\Delta y$
0	2.0	3.400000	0.310490	
	2.2	3.555245	0.372630	
	2.2	3.586315	0.369150	
	2.4	3.769150	0.429260	0.370552
1	2.4	3.770552	0.429111	
	2.6	3.985108	0.486974	
	2.6	4.014039	0.484081	
	2.8	4.254633	0.540797	0.485336
2	2.8	4.255888		

Le principe de Runge :

$$R_{0.4} = \frac{|y_{h=0.4} - y_{h=0.8}|}{15} \simeq 0.4 \times 10^{-5} \leq 0.5 \times 10^{-5}$$
 [01]

donc  $y(1.8) \simeq 4.25589$  [0.5] avec six chiffres significatifs.